ANALYSIS

Differentialgleichungen
für Schule und Studium

Teil 2

Lineare Differentialgleichungen

1. Ordnung

Variation der Konstanten

Datei 53[illegible]2

St[illegible] Dezember 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik
und Studium

https://mathe-cd.de

Inhalt

2. Fall: Exponentielle Störfunktion $y' + r \cdot y = e^{sx}$

Fallunterscheidung mit der Prüfsumme $r + s = 0$ bzw. $\neq 0$ — 31/32

B26 $y' - 4y = e^{2x}$ — B27 $y' + 2y = e^{2x}$ — B28 $y' - 2y = e^{2x}$ — 30/32

B29 $y' + 3y = e^{3x}$ — B30 $2y' - 3y = e^{x}$ — 33

B31a $y' + y = e^{x}$ — B31b $y' - y = e^{x}$!! — 34/35

B32 $y' + \frac{1}{2}y = e^{-x/2}$ — 36

Sonderfall: Die Störfunktion ist eine zusammengesetzte e-Funktion

B33 $y' = 2y + e^{2x} + x$ — B34 $y' = 2y + x$ [illegible] — 37/38

B35 $y' + y = x \cdot e^{-x}$ — 39

3. Fall: Trigonometrische Störfunktion:

B36 $y' = 2y + 5 \cdot \sin(x)$ — B37: [illegible] $+ 6 \cdot$ [illegible] — 40/41

B38 $y' + y = 5 \cdot \cos(2x)$ — 42

Sonderfall: Die Störfunktion ist eine zusammengesetzte trigonometrische Funktion

B39 $y' + y$ [illegible] $x \cdot \sin(x)$ — 43

B40 [illegible] $4y = e^{2x} + 10$ [illegible] $(2x)$ — B41 $y' - y = 2e^{-x} \cdot \sin(2x)$ — 44

Bernoulli-Differentialgleichungen werden im Text 53003 behandelt.

Lineare Differentialgleichungen

1 Begriffsdefinitionen

Eine Differentialgleichung heißt dann **linear**, wenn in ihr die Funktion y und ihre Ableitungen $y', y'', y''', \dots$ nur in der ersten Potenz auftreten.

Beispiele:

a) $y' = x^2 \cdot y + 2x$ ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

b) $y' - 2xy = x^3$ ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

c) $y' + y^2 = 1$ ist keine lineare Differentialgleichung, da y als Quadrat auftritt.

d) $5y'' + y' - 2x^2y + x^3 = 0$ ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

e) $y' \cdot y = 2x$ ist keine lineare Differentialgleichung, da y und y' ein Produkt bilden.

f) $y' - y^2 \cdot \sin x = 0$ ist keine lineare Differentialgleichung, da y^2 auftritt.

Von Bedeutung sind lineare Differenzialgleichungen mit **konstanten Koeffizienten**:

Ihre Form ist: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$ (1)

Wobei die Koeffizienten a_i (für i = 0, ..., n) konstant sind.

Besonders wichtig sind die linearen Differenzialgleichungen **1. Ordnung**, die allgemein diese Form haben: $a_1 y' + a_0 y = h(x)$ mit $a_1 \neq 0$

und die die linearen Differenzialgleichungen **2. Ordnung**, die allgemein diese Form haben:

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$ mit $a_2 \neq 0$

Weitere Beispiele:

g) $4y'' - 2y = 3x^2$ ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung <u>mit den konstanten Koeffizienten</u> $a_2 = 4$, $a_1 = 0$, $a_0 = -2$ und mit $h(x) = 3x^2$.

h) $y'''' + y' = 0$ ist eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit den konstanten Koeffizienten $a_4 = 1$, $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_0 = 0$, $h(x) = 0$.

i) $y'' - x \cdot y' = 1$ ist eine lineare Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten. $a_2 = 1, a_1 = x, a_0 = 0$ und $h(x) = 1$

k) $y''' + 2y' = y$ ist eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit den konstanten Koeffizienten $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -1$ und mit $h(x) = 0$.

Man unterscheidet **homogene** lineare Differenzialgleichungen und **inhomogene**.
Man nennt sie **homogen**, wenn in der allgemeinen Form $h(x) = 0$ ist, sonst **inhomogen**.

Homogene lineare Differenzialgleichungen findet man in h) und k).
Inhomogene lineare Differenzialgleichungen findet man in a), b), d) und g).

2 Lösungsverfahren für homogene lineare DGl. 1. Ordnung

Einführungsbeispiel

B1 Die DGL $y' = 2xy$ bringt man durch **Trennung der Variablen** in eine günstige Form.

Dazu ersetzt man y' durch $\frac{dy}{dx}$ und erhält $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

Dann bringt man y nach links, x nach rechts:

Also insgesamt so: $y' = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{y} = 2xdx}$

In diesem Fall kann man dann beide Seiten integrieren, also die Stammfunktionen berechnen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

Zu beiden Stammfunktionen gehört eine Integrationskonstante:

$$\ln|y| + c_1 = x^2 + c_2 \qquad (1)$$

Man kommt aber mit einer Konstanten aus, wenn man c_1 nach rechts bringt: $c_3 = c_2 - c_1$

$$\ln|y| = x^2 + c_3 \quad \text{mit } c_3 \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Dann wendet man die Exponentialfunktion an: $|y| = e^{x^2+c}$

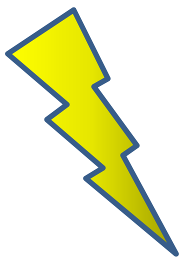
und formt um: $e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c$

Da e^c auch konstant ist, kann man e^c durch eine andere Bezeichnung C ersetzen und hat:

$$y(x) = C \cdot e^{x^2} \qquad (3)$$

<u>**Eine alternative Behandlung der Konstanten**</u> ist es, in (2) statt c die Konstante in der Form $\ln|K|$ zu schreiben mit $K \neq 0$. Dann verläuft die weitere Umformung so:

$$\ln|y| = x^2 + \ln|K| \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|K| = x^2 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{K}\right| = x^2$$



Nun wendet man die e-Funktion an:

$$\left|\frac{y}{K}\right| = e^{x^2},$$

löst den Betrag auf und erhält

$$\frac{y}{K} = \pm e^{x^2} \Leftrightarrow y = \pm K \cdot e^{x^2} \Leftrightarrow y(x) = C \cdot e^{x^2} \qquad (3)$$

wobei dann $\pm K$ durch $C \in \mathbb{R}$ ersetzt worden ist.

Diesen ganzen Aufwand muss man treiben, weil man eine günstige Form für die allgemeine Lösung such und dabei aber die Integrationskonstante nicht weglassen darf, weil eben die allgemeine Lösung gesucht ist.

Die soeben gezeigte Methode kann man allgemein darstellen:

Eine DGL der Form $\boxed{y' = g(x)\cdot h(y)}$ lässt sich wie folgt umformen (Trennung der Variablen):

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Damit eine Lösung existiert, müssen noch einige Voraussetzungen erfüllt sein.
Zunächst muss g in einem Intervall $a < x < b$ stetig sein, und ebenso h in einem Intervall $c < y < d$. Dann existiert innerhalb des durch diese beiden Ungleichungen beschriebenen Rechtecks eine Integralkurve als Lösung der Differentialgleichung.
Die Berechnung der Lösung geschieht dann durch Integration.

Ähnliches gilt für DGL der Form $\boxed{y' = \frac{g(y)}{f(x)}}$ (die man wie oben auch al… odukt sc… n kann):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)}$$

Oder bei DGL der Form $\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Ein sehr wichtige und oft… nutze Rec… ng ist … ösung einer homogenen linearen DGL 1. Ordn… g mit konstanten … ffizienten, wobei man nicht integrieren muss:

SATZ : Jede DGL der … $y' + r\cdot y = 0$ … die Lösung $y_o(x) = C\cdot e^{-rx}$

Beweis: Wir verwende… n Lösu… atz: $y_o(x) = C\cdot e^{\lambda x}$
zusammen mit … bleitung: $y_o'(x) = C\cdot \lambda e^{\lambda x}$
…insetzen in die … $C\cdot\lambda e^{\lambda x} + r\cdot C\cdot e^{\lambda x} = 0$
… klammern: $Ce^{\lambda x}\cdot(\lambda + r) = 0$
Die … Se… wird als Funktion nur die Nullfunktion, wenn gilt:

$$\lambda + r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -r$$

Also kann man sofort sagen: Die DGL $y' - \frac{1}{2}y = 0$ hat die allgemeine Lösung $y = C\cdot e^{+x/2}$ usw.

Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung kann man auf diese Form bringen:

$$y' = g(x) \cdot y$$

Lösungsverfahren ganz ausführlich:

1. y‘ durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen: $\quad \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot y$

2. Variable trennen: $\quad \frac{dy}{y} = g(x)dx$

3. Beidseitige Integration: $\quad \int \frac{dy}{y} = \int g(x)dx$

$$\ln|y| = \int g(x)dx + C$$

Ode man verwendet die Integrationskonstante in der Form $\ln|K|$ mit $K \neq 0$:

$$\ln|y| = \int g(x)dx + \ln|K|$$

Umstellen: $\quad \ln|y| - \ln|K| = \int g(x)dx$

Logarithmusregel $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$ anwenden:

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \int g(x)dx$$

4. Auflösen nach y:

Anwenden der Regel $\ln a = b \iff a = e^b$

$$\left|\frac{y}{K}\right| = e^{\int g(x)dx}$$

$$\frac{y}{K} = \pm e^{\int g(x)dx}$$

$$y = \pm K \cdot e^{\int g(x)dx}$$

Ersetzen von $\pm K$ durch C: $\quad y = C \cdot e^{\int g(x)dx}$

Im **Text 53001** werden sehr viele Differentialgleichungen mit dieser Methode **„Trennung der Variablen“** gelöst, auch nicht lineare.

Beispiele

B2 $\boxed{y'-2y=0}$

Die einzigen Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen 0 ergeben können, sind e-Funktionen. Daher macht man diesen

Ansatz: $y = c \cdot e^{ax}$. Es folgt: $y' = c \cdot a \cdot e^{ax}$

Einsetzen in die DGL: $a \cdot ce^{ax} - 2 \cdot ce^{ax} = 0$

$c \cdot e^{ax} \cdot (a-2) = 0$

Da c und e^{ax} nicht Null sind, folgt $(a-2) = 0$

Daraus ergibt sich $a = 2$

LÖSUNG. $\boxed{y = c \cdot e^{2x}}$

Man kann sich das auch so merken: Nach dem ... auf Seite ... unten gilt:

Der Faktor -2 vor y tritt mit umgekehrtem Vorzeichen im Exponenten von e auf.

$y'-\boxed{2}y=0 \Rightarrow y = c \cdot e^{\boxed{2}x}$

B3 $\boxed{\tfrac{1}{3}y'+y=0}$

Kurzlösung Umrechnen zu $y'+\boxed{3}y=0$

Lösung: $y = c \cdot e^{\boxed{-3}x}$

Ausführung: (w... doch ...)

Ansatz $y = c \cdot e^{ax}$. Es folgt: $y' = c \cdot a \cdot e^{ax}$

Einsetzen in die DGL: $a \cdot ce^{ax} + 3 \cdot ce^{ax} = 0$

$\underbrace{c \cdot e^{ax}}_{\neq 0} \cdot (a+3) = 0$

Daraus ergibt sich $a = -3$

LÖSUNG. $\boxed{y = c \cdot e^{-3x}}$

B4 $\boxed{x \cdot y' + y = 0}$

Trennung der Variablen: $\boxed{y' = \frac{y}{x}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{y}} = \boxed{\frac{dx}{x}}$

Berechnung der Stammfunktionen durch Integration:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

Auf beiden Seiten wurde integriert, daher erhalten beide Seiten auch ihre Integrationskonstante. Man kann diese Konstanten rechts zu c zusammenfassen:

$$\ln|y| = \ln|x| + \underbrace{c_2 - c_1}_{c} \qquad | \ e^{[illegible]}$$

Ab jetzt zeige ich unterschiedliche Wege der Umformung:

(a) $|y| = e^{\ln|x| + c}$

Splitten: $|y| = e^{\ln|x|} \cdot e^{c}$

Nun ist e^c eine ne[illegible] Konstante, ich [illegible]nne [illegible]

Außerdem laute[illegible] $e^{\ln a} = a$

Also: $|y$[illegible]$\cdot|x|$ [illegible] !!

$y = \pm K$[illegible]

[illegible]sst man $\pm$ u[illegible]en Betrag v[illegible] weg, dann darf $K \in \mathbb{R}$ sein.

Ergebnis: $y =$[illegible]

(b) [illegible] schreib[illegible] K[illegible]tante c in der Form: $c = \ln|K|$. Dann folgt:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|K|$$

$$\ln|y| - \ln|K| = \ln|x|$$

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln|x| \qquad | \ e^{\square}$$

$$\left|\frac{y}{K}\right| = |x| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{K} = \pm x \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm Kx$$

Schreibt man dann noch $k = \pm K$, dann lautet die Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$y = k \cdot x$

3 Lösungsverfahren für inhomogene lineare DGl. 1. Ordnung

3.1 Lösung durch Substitution

Inhomogene Differenzialgleichungen lassen sich in der Regel nicht durch Trennung der Variablen lösen. In manchen Fällen hilft dann eine Substitution weiter, mit der man dann eine Differentialgleichung erzeugt, bei der dieses Verfahren zum Ziel führt.
Hier ein Beispiel, bei dem eine **Substitution** weiter hilft:

B5 $\boxed{y' = x + y}$ bzw. $\boxed{y' - y = x}$

Man verwendet die **Substitution** $u = x + y$. Durch Ableiten erhält man $u' = 1 + y'$, also ist $y' = u' - 1$.

Einsetzen in (1) ergibt $u' - 1 = u$

$$\boxed{u' = u + 1} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = u + 1$$

Jetzt gelingt die **Trennung der Variablen**: $\frac{du}{u+1} = 1\,dx$

Stammfunktionen durch Integration: $\int \frac{du}{u+1} = \int 1\,dx$

$$\ln(u+1) = x + C$$

$$u + 1 = e^{x+C}$$

Mit neuer Konstanten K: $u + 1 = K \cdot e^{x}$

$$u = K \cdot e^{x} - 1$$

Rücksubstitution: $x + y = K \cdot e^{x} - 1$

Ergebnis: $y = K \cdot e^{x} - 1 - x$

Substitutionen werden im Text 53008 ausführlich behandelt.

3.2 Lösung durch Variation der Konstanten:

Zuerst der allgemeine Lösungsweg:

Voraussetzung: Die DGL muss diese Form haben: $y'(x) = f(x)\cdot y(x) + g(x)$

1. Schritt: Bestimme die Lösung $y_H(x)$ der **homogenen** DGL. $y'(x) + f(x)\cdot y(x) = 0$

In der homogenen Gleichung ist die **Störfunktion** g(x) durch 0 ersetzt worden).

Trennung der Variablen: $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot y \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{y} = f(x)dx \;\Leftrightarrow\; \int\frac{dy}{y} = \int f(x)dx$

Integration: $\ln|y| = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; y_h = C\cdot e^{\int f(x)dx}$

Oder vereinfacht aufgeschrieben: $y_O(x) = C\cdot r(x)$

2. Schritt: **Man ersetzt die Konstante C durch eine Funktion $c(x)$.**

Das nennt man die ***Variation der Konstanten.***

Dann ist der Ansatz für die Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = c(x)\cdot r(x)$$

Ableiten mit der Produktregel: $y'(x) = c'(x)\cdot r(x) + c(x)\cdot r'(x)$

Einsetzen in die inhomogene DGL $y'(x) = f(x)\cdot y(x) + g(x)$

ergibt: $c'(x)\cdot r(x) + c(x)\cdot r'(x) = f(x)\cdot c(x)\cdot r(x) + g(x)$

Umstellen nach der Störfunktion:

$$g(x) = c'(x)\cdot r(x) + c(x)\cdot r'(x) - f(x)\cdot c(x)\cdot r(x)$$

$$g(x) = c'(x)\cdot r(x) + c(x)\cdot\underbrace{\left(r'(x) - f(x)\cdot r(x)\right)}_{=0}$$

Dass die Klammer 0 ist, erkennt man dann, wenn man in die homogene DGL

$y_h(x) = C\cdot r(x)$ einsetzt.

So bleibt übrig: $g(x) = c'(x)\cdot r(x)$

Und daraus folgt: $c'(x) = \frac{g(x)}{r(x)} \;\Rightarrow\; c(x) = \int\frac{g(x)}{r(x)}dx + C$

Und dann kennt man auch die inhomogene Lösung:

$$y(x) = c(x)\cdot r(x)$$

wobei r(x) der homogenen Lösung entspricht.

Beispiele zur Variation der Konstanten

B6 Gegeben ist die <u>inhomogene</u> DGL: $y' = y + e^x$

1. Schritt: Lösung der homogenen DGL: $y' = y$

Trennung der Variablen: $\frac{dy}{dx} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx$

Stammfunktion: $\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad .. \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^x$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen DGL: $y' = y + e^x$ mit „Variation der Konstanten".

Ansatz: $y = k(x) \cdot e^x$

Ableitung: $y' = k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x$ (Produktregel)

Beides setzt man in die inhomogene Differentialgleichung ein:

$$k'(x) \cdot e^x + \cancel{k(x) \cdot e^x} = \cancel{k(x) \cdot e^x} + e^x \quad \Leftrightarrow \quad k'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k(x) = x + C$$

Ergebnis: $y = (x + C) \cdot e^x$

B7 $y' + \frac{y}{x} = 3x$

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung: $y' + \frac{y}{x} = 0$

Man trennt die Variablen: $y' = -\frac{y}{x}$ d. h. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{y}} = -\boxed{\frac{dx}{x}}$

Integration: $\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln|x|^{-1} + \ln k = \ln\left|\frac{k}{x}\right| \quad \text{oder} \quad y_O = \frac{k}{x} \qquad C \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Gleichung durch „Variation der Konstanten".

Ansatz: $y = \frac{k(x)}{x}$. (4)

Ableiten (Quotientenregel): $y' = \frac{k'(x) \cdot x - 1 \cdot k(x)}{x^2}$ (5)

Beides setzt man in die gegebene inhomogene Differentialgleichung $y' + \frac{y}{x} = 3x$ ein:

$$\frac{k'(x) \cdot x - k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} = 3x$$

Zusammenfassen: $\frac{k'(x) \cdot x}{x^2} = 3x$ d. h. $k'(x) = 3x^2$

Integration: $k(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$

Einsetzen in (4): $y = \frac{x^3 + C}{x} = x^2 + \frac{C}{x}$

Fortsetzung im Original